با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی هشتم
فصل هفتم

عنوان فصل: توان و جذر

از صفحه‌ی ۱۰۱ تا صفحه‌ی ۱۱۸ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل توان و جذر آمده است.

مباحث فصل: توان، تقسیم اعداد تواندار، جذر تقریبی، نمایش اعداد رادیکالی روی محور، خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۱۰۲ · تمرین یادآوری — ضرب توان‌ها با پایه یا توان مساوی ۴

۲ صفحه ۱۰۳ · فعالیت — توان یک عدد توان‌دار ۴

۳ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — توان یک عدد توان‌دار ۵

۴ صفحه ۱۰۴ · تمرین — مکعب، توان و درستی تساوی‌ها ۵

۵ صفحه ۱۰۴ · تمرین — گزینه‌ی درست ۶

۶ صفحه ۱۰۵ · تمرین — ساده کردن عبارت‌های توان‌دار ۷

۷ صفحه ۱۰۶ · فعالیت — تقسیم توان‌ها با پایه‌ی مساوی ۷

۸ صفحه ۱۰۷ · کار در کلاس — تقسیم عددهای توان‌دار ۸

۹ صفحه ۱۰۷ · فعالیت — تقسیم توان‌ها با توان مساوی ۸

۱۰ صفحه ۱۰۸ · فعالیت — قانون تقسیم با توان‌های مساوی ۹

۱۱ صفحه ۱۰۸ · کار در کلاس — تقسیم با توان مساوی و ساده کردن ۹

۱۲ صفحه ۱۰۸ · تمرین — نوشتن عدد به صورت توان‌دار ۱۰

۱۳ صفحه ۱۰۹ · تمرین — ساده کردن، جای خالی، مرتب کردن ۱۰

۱۴ صفحه ۱۰۹ · خواندنی — رشد باکتری‌ها ۱۱

۱۵ صفحه ۱۱۰ · فعالیت — طول پل و جذر تقریبی ۱۱

۱۶ صفحه ۱۱۱ · کار در کلاس — جذر تقریبی ۲ و ۲۰۰ ۱۲

۱۷ صفحه ۱۱۲ · کار در کلاس — جدول مقدار تقریبی جذرها ۱۲

۱۸ صفحه ۱۱۲ · تمرین — جذر تقریبی و مقایسه ۱۳

۱۹ صفحه ۱۱۳ · تمرین — جاهای خالی روی محور و نزدیک‌ترین عدد ۱۳

۲۰ صفحه ۱۱۴ · فعالیت — نمایش $2\sqrt{}$ و رادیکال‌ها روی محور ۱۴

۲۱ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — نمایش $2\sqrt{-3}$ روی محور ۱۴

۲۲ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — جذر حاصل‌ضرب ۱۵

۲۳ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — ضرب رادیکال‌ها ۱۵

۲۴ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — جذر حاصل تقسیم ۱۶

۲۵ صفحه ۱۱۶ · کار در کلاس — جذر کسر و موقعیت روی محور ۱۶

۲۶ صفحه ۱۱۷ · تمرین — نزدیک‌ترین عدد طبیعی و محور ۱۷

۲۷ صفحه ۱۱۷ · تمرین — مربع جادویی با جمع ۶- ۱۷

۲۸ صفحه ۱۱۷ · تمرین — محاسبه، جذر ۷۰۰ و عددهای بین ۱۸

۲۹ صفحه ۱۱۸ · تمرین ترکیبی — مرور فصل ۷ ۱۸

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۱ صفحه ۱۰۲ تمرین یادآوری

یادآوری: اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند: a^m × a^n = a^(m+n) و a^m × b^m = (a×b)^m.

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید: 2^3 × 2^6، 2^3 × 3^3، 8^3، (-2/3)^5 × (-2/3)^2، 4^14 × 3^6 و ...

۲ــ حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان‌دار بنویسید: a^8 × a^2، x^4 × y^4، a^3 × b^4 × (ab)^5، (xy)^2، (xy)^7 ×، 2a^3 × (2a)^3 × 8a

۳ــ حجم مکعبی به ضلع a^2 چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟

۴ــ جاهای خالی را با عددها و حرف‌های مناسب پر کنید: 5^(□×6) = 18^5، a^□ × a^3 = a^8

۱) وقتی پایه‌ها مساوی‌اند توان‌ها جمع می‌شوند و وقتی توان‌ها مساوی‌اند پایه‌ها در هم ضرب می‌شوند: 2^9 = 2^3 × 2^6؛ 2^12 = 16^3 = (8×2)^3 = 2^3 × 8^3؛ (-2/3)^7 = (-2/3)^5 × (-2/3)^2.

- a^2 × a^8 = a^10
- x^4 × y^4 = (xy)^4
- (ab)^5 × a^3 × b^4 = a^5 b^5 × a^3 × b^4 = a^8 b^9
- (xy)^2 × (xy)^7 = (xy)^9
- 8a × (2a)^3 × 2a^3 = 8a × 8a^3 × 2a^3 = 128 a^7

۳) حجم مکعب اول a^6 = (a^2)^3 و حجم مکعب دوم a^3 است؛ نسبت: a^3 = a^3 ÷ a^6؛ یعنی حجم مکعب اول a^3 برابر حجم مکعب دوم است.

۴) 18^5 = (6×3)^5 پس جای خالی 3؛ a^8 = a^3 × a^5 پس جای خالی 5.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۱۰۳ فعالیت

حاصل عبارت 2^3 × 2^3 × 2^3 × 2^3 را به دو روش زیر می‌توان نشان داد: 2^3 × 2^3 × 2^3 × 2^3 = 2^12 و 2^(3+3+3+3) = (2^3)^4. با مقایسه‌ی تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت 2^12 = (2^3)^4؟ اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید: (7^2)^5 = 7^10، ...^(3)((4/11))، a^8 = (a^2)^4. آنچه را فراگرفته‌اید به صورت قانون کلی بیان کنید: اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آنگاه (a^m)^n = a^□.

بله؛ 2^12 = (2^3)^4. هر یک از تساوی‌ها درست است: 7^10 = 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 و (7^2)^5 = 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 = a^8 و (a^2)^4 = a^2 × a^2 × a^2 × a^2.

قانون کلی: (a^m)^n = a^(m×n) — برای توان‌رساندن به یک عدد توان‌دار، توان‌ها در هم ضرب می‌شوند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳ صفحه ۱۰۳ کار در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید: 4^(5^7)، 7^(18^2)، 8^(x^4)، 3^((ab)^2)، 3^(xy^2)، n^(2^m)

- (5^7)^4 = 5^28
- (18^2)^7 = 18^14
- (x^4)^8 = x^32
- ((ab)^2)^3 = (ab)^6 = a^6 b^6
- (xy^2)^3 = x^3 y^6
- (2^m)^n = 2^(mn)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۴ صفحه ۱۰۴ تمرین

۱ــ حجم مکعبی به ضلع 8 cm را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید که پایه‌ی آن عدد 2 باشد.

۲ــ بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۳ــ کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید: 4^3 × 2^3 = 4^(3^2)، 5^3 × 3^5 = 2^(3^5)، 8^3 = 4^(3^2)، 2^3 = 2^(3^0)، 9^5 = 2^(5^3)، 4^9 = 2^3 × 3^2، 5^3 × 5^(2^2) = 5^12، 1 = a^2 · a^0، 6^a = 2^(3^(−2))، 6^4 = 6^(−4)

۴ــ در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید: 3^□ = 3^5 = (3^□)^5 = 9^5

۱) حجم مکعب 2^9 = 2^(3^3) = 8^3 = سانتی‌متر مکعب.

۲) 3^13 = 3^10 × 3^3 = 3^3 × (3^2)^5 = 3^3 × 9^5 = 27.

تساوی	درست/نادرست	دلیل
$3^4\times3^2=(3^2)^4$	نادرست	$3^6=3^4\times3^2$ ولی $3^8=(3^2)^4$
$3^5\times3^5=(3^5)^2$	درست	هر دو برابر 3^{10} هستند
$3^8=(3^2)^4$	درست	توان‌ها ضرب می‌شوند: $4\times2=8$
$3^2=(3^0)^2$	نادرست	$(3^0)^2=1^2=1$
$5^9=(5^3)^2$	نادرست	$(5^3)^2=5^6$
$9^4=3^2\times3^2$	نادرست	$3^2\times3^2=3^4=81$ ولی $9^4=6561$
$12^5=(2^2)^5\times3^5$	درست	$12^5=(4\times3)^5=4^5\times3^5$
$a^2\cdot a^0=1$	نادرست	$a^2\cdot a^0=a^2\cdot1=a^2$
$2^6=((-2)^3)^2$	درست	$2^6=64=(-8)^2=((-2)^3)^2$
$4^6=(-4)^6$	درست	توان زوج، حاصل مثبت

۴) 3^10 = (3^2)^5 = 9^5.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵ صفحه ۱۰۴ تمرین

۳ــ حاصل عبارت 5^(-5) × 3^(-5) برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟ الف) 8^(-5) ب) -5^8

8^(-5) = 5^(-5) × 3^(-5) که با گزینه‌ی (الف) برابر است (5^8 = 8^(-5)) مثبت است، ولی (5^8)- = -5^8 منفی است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶ صفحه ۱۰۵ تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های 3^6 × 3^7 × 2^2 × 2^5 و 240 × 240 × 240 و x^3 y^4 · (y^3)^2 · (x^2)^5 را ساده کنید و به صورت عبارت توان‌دار بنویسید.

۴ــ کدام عددهای طبیعی را می‌توان به جای □ نوشت تا نامساوی (-2)^□ < 15 درست باشد؟

۵ــ حاصل 3^5 + 3^5 + 3^5 و حاصل 3^5 × 27 را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۶ــ عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست آید (از هر چهار عدد استفاده کنید).

۷ــ مقدار عددی عبارت‌های جبری را به ازای a = 6، b = −2 و c = −4 به دست آورید.

- 240 × 240 × 240 = 240^3
- (x^2)^5 · (y^3)^2 · x^3 y^4 = x^10 · y^6 · x^3 · y^4 = x^13 y^10

۴) (-2)^n وقتی n زوج باشد مثبت و برابر 2^n است؛ 2^4 = 16 > 15؛ پس n باید عددی زوج و n ≥ 4 باشد: 4, 6, 8, ... (برای n = 2: 15 > 4 و برای n فرد حاصل منفی است.)

۵) 3^6 = 3×3^5 = 3^5+3^5+3^5 و 3^8 = 3^5 × 3^3 = 27×3^5.

۱، ۶، ۷) برای عبارت‌های توان‌دار دیگر، از قانون‌های a^m·a^n = a^(m+n)، a^m·b^m = (ab)^m و (a^m)^n = a^(mn) استفاده می‌کنیم؛ در ارزیابی عددی، ابتدا مقدارها را جای‌گذاری و سپس توان و ضرب را محاسبه می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۱۰۶ فعالیت

دمای مرکز خورشید حدود 10^7 درجه‌ی سانتی‌گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می‌آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان‌دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید. حل: آب در ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد به جوش می‌آید و داریم: 10^2 = 100. ÷ 10^7 10^5 = 10×10×10×10×10 = (10×10×10×10×10×10×10)/(10×10) = 10^2. بنابراین = 10^2 ÷ 10^7 10^□ یعنی دمای مرکز خورشید □ برابر دمایی است که آب در آن به جوش می‌آید. اکنون، حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید: 3^(-9) ÷ 5^(-9)، 3^(3/2) ÷ 6^(3/2). با استفاده از نمونه‌های داده‌شده برای محاسبه‌ی تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی قانونی بنویسید: اگر a عددی دلخواه و مخالف صفر و m، n عددهای طبیعی باشند: a^□ = a^m ÷ a^n

10^5 = 10^2 ÷ 10^7؛ یعنی دمای مرکز خورشید 100000 = 10^5 برابر دمای جوش آب است. تقسیم را به صورت کسر 10^5/1 = 10^7/10^2 هم می‌توان نوشت.

- (-9)^2 = (-9)^3 ÷ (-9)^5

- $(3/2)^6 \div (3/2)^3 = (3/2)^3$

قانون: $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$ ($a \neq 0$ و $m > n$) — در تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی، پایه را می‌نویسیم و توان مخرج را از توان صورت کم می‌کنیم.

۸ صفحه ۱۰۷ کار در کلاس

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید: $8^5 \div 8^9$، $6^3 \div 6$، $(-3)^5 \div$ $(-3)^2$، $(4/5)^3 \div (4/5)^6$، $(-0.3)^2 \div (-0.3)^5$

۲ــ جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید: $3^4 = \square^3 \div 3^5$، $14^3 = (\square)^2 \div 14^5$

۳ــ حاصل را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: $a^5 \div a^{12}$، $(xy)^4 \div (xy)^7$، $(-x)^3 \div (-x)^7$

- $8^9 \div 8^5 = 8^4$
- $6^3 \div 6 = 6^2$
- $(-3)^5 \div (-3)^2 = (-3)^3$
- $(4/5)^6 \div (4/5)^3 = (4/5)^3$
- $(-0.3)^5 \div (-0.3)^2 = (-0.3)^3$
- $3^5 \div 3^1 = 3^4$ پس جای خالی 1
- $14^5 \div 14^2 = 14^3$ پس جای خالی 14
- $a^{12} \div a^5 = a^7$
- $(xy)^7 \div (xy)^4 = (xy)^3$
- $(-x)^7 \div (-x)^3 = (-x)^4 = x^4$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹ صفحه ۱۰۷ فعالیت

مثال‌های داده‌شده را مطالعه کنید و با پر کردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ هر یک از تقسیم‌ها چگونه به دست آمده است: $2^4 = (12/6)^4 = (12\times12\times12\times12)/(6\times6\times6\times6)$؛ $12^4 \div 6^4 = 3^5$؛ $7^5 \div 5^5(3/7)$؛ $(-2/3)^3 = (-4/6)^3 = 6^3 \div (-4)^3$

هنگام تقسیم دو عدد توان‌دار با توان مساوی، هر عامل صورت با عامل مخرج تقسیم می‌شود؛ یعنی حاصل برابر (پایه‌ی صورت ÷ پایه‌ی مخرج) به همان توان است: $12^4 \div 6^4 = (12\div6)^4 = 2^4$.

$(3/7)^5 = 7^5 \div 3^5$ و $(-2/3)^3 = (-4/6)^3 = 6^3 \div (-4)^3$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰ صفحه ۱۰۸ فعالیت

با توجه به مثال‌های صفحه‌ی قبل، توضیح دهید تساوی 4^5 = 2^5 ÷ 8^5 چگونه به دست آمده است. اکنون، برای تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی، قانون زیر را کامل کنید: «تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی: ...». به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید: 6^8 ÷ 3^8، 4^(−3) ÷ 4^(−2). اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

4^5 = 5^(8÷2) = 2^5 ÷ 8^5. **قانون:** در تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی، توان را حفظ می‌کنیم و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

- 6^8 ÷ 3^8 = (6÷3)^8 = 2^8
- (−2)^4 ÷ (−3)^4 = ((−2)÷(−3))^4 = (2/3)^4

با نماد: اگر a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و b ≠ 0 باشد: a^m ÷ b^m = (a ÷ b)^m = (a/b)^m.

۱۱ صفحه ۱۰۸ کار در کلاس

۱ــ حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید: 3^7 ÷ 5^7، 7^3 ÷ 14^3، 5^(−8) ÷ 5^(−2)، 27^2 ÷ 9^2

۲ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید:

3^3 × 2^7 × 3^4 × 5^7 و عبارت‌های دیگر

- 5^7 ÷ 3^7 = (5/3)^7
- 14^3 ÷ 7^3 = 2^3
- (−8)^5 ÷ (−2)^5 = 4^5
- 9^2 ÷ 27^2 = (9/27)^2 = (1/3)^2

۲) 30^7 = 10^7 × 3^7 = (3^4 × 3^3) × (5^7 × 2^7) = 3^3 × 2^7 × 3^4 × 5^7.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۱۰۸ تمرین

۱ــ هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید: 81، 8-، 1024، 125، 729، ...

۲ــ کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

عدد	به صورت توان‌دار
81	$9^2 = 3^4$
8-	$(-2)^3$
1024	$32^2 = 4^5 = 2^{10}$
125	5^3
729	$27^2 = 9^3 = 3^6$

۲) برای بررسی هر تساوی، دو طرف را با قانون‌های توان ($a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$، $(a^m)^n = a^{(mn)}$، $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$، $a^m \div b^m = (a/b)^m$) ساده می‌کنیم و مقدارها را مقایسه می‌کنیم؛ مثلاً $(-5)^2 = 25$ و $-5^2 = -25$ متفاوت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۱۰۹ تمرین

۳ــ حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۴ــ در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید: $3^9 = 3^{\square} \times 3^5$، $(-6)^3 = (-6)^{\square} \div (-6)^8$

۵ــ عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید: 6^5، 11^2، -4^3، $(-1)^5$، 0، $(1/2)^5$

۶ــ کدام تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: $-(10^2)^3$، $[(-10)^2]^3$، $(x^2 y^3)^4$

۸ــ نصف 2^9 و ربع 4^7 را به صورت عددهای توان‌دار بنویسید.

- $3^9 = 3^4 \times 3^5$ پس جای خالی 4
- $(-6)^3 = (-6)^5 \div (-6)^8$ پس جای خالی 5

۵) مقدارها: $6^5 = 7776$، $11^2 = 121$، $-4^3 = -64$، $(-1)^5 = -1$، 0، $(1/2)^5 = 1/32$. ترتیب صعودی: $-4^3 < (-1)^5 < 0 < (1/2)^5 < 11^2 < 6^5$.

- $-(10^2)^3 = (-100)^3 = -10^6$
- $[(-10)^2]^3 = 100^3 = 10^6$

- $(x^2 y^3)^4 = x^8 y^{12}$

۸) نصف 2^9: $2^8 = 2 \div 2^9$؛ ربع 4^7: $4^6 = 4 \div 4^7$ (یا $2^{12} = 4 \div 2^{14}$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۴ صفحه ۱۰۹ **خواندنی**

باکتری‌ها در وضعیت مطلوب در هر ۲۰ دقیقه به دو نیم تقسیم می‌شوند. برای مثال اگر در حال حاضر ۲ باکتری داشته باشیم در ۲۰ دقیقه دیگر $2^2 = 4$ باکتری و در ۶۰ دقیقه دیگر $2^4 = 16$ باکتری خواهیم داشت. به نظر شما اگر مواد غذایی لازم موجود باشد، پس از گذشت ۲۴ ساعت چند باکتری خواهیم داشت؟

---

۲۴ ساعت $= 24 \times 60 = 1440$ دقیقه و $1440 \div 20 = 72$ مرحله‌ی دو برابرشدن است. اگر با ۲ باکتری شروع کنیم: $2 \times 2^{72} = 2^{73}$ باکتری (عددی حدود $9/4 \times 10^{21}$) خواهیم داشت.

---

۱۵ صفحه ۱۱۰ **فعالیت**

آزاده، نرگس و نسیم هنگام گردش علمی به یک آب‌گذر (کانال) به عرض ۵ متر رسیدند. در طرف دیگر آب‌گذر دیواره‌ای به ارتفاع ۳ متر وجود داشت. آنها می‌خواهند بدانند اگر پلی برای رفتن به طرف دیگر آب ساخته شود، طول آن چقدر خواهد بود؟ با دقت در گفت‌وگوی این سه دانش‌آموز سعی کنید نظر هر دانش‌آموز را توضیح دهید. اگر این دانش‌آموزان بخواهند به کمک روش بالا مقدار $\sqrt{34}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنند، چگونه باید این کار را انجام دهند؟

- **آزاده:** مسئله را به یک مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۳ و ۵ متر تبدیل کرده است؛ طول پل وتر آن مثلث است.
- **نرگس:** از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کند: $\text{وتر}^2 = 2^5 + 2^3 = 34$ و می‌گوید چون $25 < 34 < 36$ پس $5 < \sqrt{34} < 6$.
- **نسیم:** وسط ۵ و ۶ یعنی ۵.۵ را آزمایش می‌کند: $5.5^2 = 30.25 < 34$ پس $\sqrt{34}$ از ۵.۵ بزرگ‌تر است.
- **آزاده:** عددهای ۵.۷، ۵.۸ و ۵.۹ را بررسی می‌کند: مجذورها ۳۲.۴۹، ۳۳.۶۴ و ۳۴.۸۱؛ پس $5.8 < \sqrt{34} < 5.9$ و $\sqrt{34} \approx 5.8$.

برای دو رقم اعشار، عددهای بین ۵.۸ و ۵.۹ را آزمایش می‌کنیم: $5.82^2 = 33.87$، $5.83^2 = 33.99$، $5.84^2 = 34.11$؛ پس $\sqrt{34} \approx 5.83$ (ماشین‌حساب: 5.83095). طول پل حدود ۵.۸ متر است.

۱۶ صفحه ۱۱۱ کار در کلاس

۱ــ با پر کردن جاهای خالی، مقدار √2 و √200 را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین‌حساب به دست می‌آورد، مقایسه کنید. الف) 2 > √2 > 1... ب) 225 > 200 > 196

الف) 4 > √2 > √1 یعنی 2 > √2 > 1. وسط ۱ و ۲ یعنی 1.5: 2 < 2.25 = 1.5^2، پس √2 < 1.5. جدول: 1.3^2 = 1.69، 1.4^2 = 1.96، 1.5^2 = 2.25؛ چون 1.96 < 2 < 2.25، √2 < 1.5 < 1.4 و √2 ≈ 1.4 (ماشین‌حساب: 1.41421).

ب) 225 > 200 > 196 پس 15 > √200 > 14. وسط ۱۴ و ۱۵ یعنی 14.5: 200 < 210.25 = 14.5^2؛ جدول: 14.1^2 = 198.81، 14.2^2 = 201.64؛ پس 14.2 > √200 > 14.1 و √200 ≈ 14.1 (ماشین‌حساب: 14.14213).

۱۷ صفحه ۱۱۲ کار در کلاس

۲ــ ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید؛ سپس به کمک ماشین‌حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده‌اید، مقایسه کنید: √140، √99، √68، √18.5، √10.3، √5، √3

عدد	حدس	ماشین‌حساب
√140	۱۲	11.83
√99	۱۰	9.95
√68	۸	8.25
√18.5	۴٫۳	4.30
√10.3	۳٫۲	3.21
√5	۲٫۲	2.24
√3	۱٫۷	1.73

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۱۱۲ تمرین

۱ــ به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید:

√19، √40، √150، √385

۲ــ در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین‌حساب کمک بگیرید.

عدد	بین دو عدد طبیعی	تقریب تا یک رقم اعشار
√19	4 و 5	4.4
√40	6 و 7	6.3
√150	12 و 13	12.2
√385	19 و 20	19.6

۲) برای مقایسه‌ی دو عدد جذری، مجذور هر دو را مقایسه می‌کنیم؛ اگر a < b (هر دو مثبت) آنگاه √a < √b. در مقایسه با عدد معمولی، آن را به صورت جذر عدد مجذورش می‌نویسیم (مثلاً √9 = 3).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹ صفحه ۱۱۳ تمرین

۳ــ جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پر کنید.

۴ــ در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم، و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است (نقاط A، B، C).

نقطه‌ی مشخص‌شده روی محور به کدام یک از عددهای داده‌شده نزدیک‌تر است؟ دلیل بیاورید.

برای پر کردن محور، هر عدد جذری را بین دو عدد صحیح متوالی قرار می‌دهیم: √a بین n و n+1 است اگر n^2 ≤ a < (n+1)^2 . برای نزدیک‌ترین عدد: مجذور عدد را با مجذور نقطه‌ی مشخص‌شده مقایسه می‌کنیم؛ مثلاً √79 ≈ 8.9، √98 ≈ 9.9، √81 = 9، √85 ≈ 9.2؛ اگر نقطه نزدیک ۹ باشد، √81 پاسخ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰ صفحه ۱۱۴ **فعالیت**

در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین‌حساب محاسبه کردید. در این فعالیت با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. مثلث OAB یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به ضلع ۱ است. به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه‌ی C قطع کند. طول پاره‌خط OC چقدر است؟ چرا نقطه‌ی C، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟ به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $-\sqrt{2}$ را نمایش دهد. در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه‌ی قائمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$، $\sqrt{5}$ است. چرا؟ آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره‌خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟ دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باز کنید و عددهای $1+\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

OB وتر مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۱ است: $OB^2 = 1^2+1^2 = 2$ پس $OB = \sqrt{2}$. چون کمان با شعاع OB رسم شده است، $OC = OB = \sqrt{2}$ و نقطه‌ی C که روی محور است عدد $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد. برای $-\sqrt{2}$ همین کمان را در سمت چپ O روی محور می‌زنیم.

در مثلث بعدی یک ضلع قائمه برابر وتر قبلی و ضلع قائمه‌ی دیگر ۱ است؛ طبق فیثاغورس وتر: $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$ پس $\sqrt{3}$؛ سپس $(\sqrt{3})^2+1 = 4$ پس $\sqrt{4} = 2$؛ $(\sqrt{4})^2 + 1 = 5$ پس $\sqrt{5}$. به همین ترتیب $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ را با ادامه‌ی مثلث‌ها (هر بار ضلع قائمه‌ی ۱ واحدی روی وتر قبلی) رسم می‌کنیم.

برای نمایش $1+\sqrt{3}$ با پرگار به اندازه‌ی $\sqrt{3}$ (وتر مثلث سوم) از نقطه‌ی ۱ روی محور کمانی به سمت راست می‌زنیم؛ و برای $2+\sqrt{5}$ دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $\sqrt{5}$ باز می‌کنیم و از نقطه‌ی ۲ کمان می‌زنیم.

۲۱ صفحه ۱۱۴ **کار در کلاس**

عدد $3-\sqrt{2}$ را روی محور اعداد نمایش دهید. برای نمایش عدد $3-\sqrt{2}$ روی محور از تساوی $3-\sqrt{2} = 3+(-\sqrt{2})$ استفاده کنید.

ابتدا $-\sqrt{2}$ را (مانند فعالیت قبل) در سمت چپ صفر نشان می‌دهیم. سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $\sqrt{2} \approx 1.41$ باز کرده و از نقطه‌ی ۳ به سمت چپ کمان می‌زنیم؛ نقطه‌ی به‌دست‌آمده $3-\sqrt{2} \approx 1.59$ است که بین ۱ و ۲ قرار دارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۱۱۵ فعالیت

با توجه به عددهای داده‌شده‌ی a و b، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید: (a, b) = (9, 16)، (4, 16)، (25, 4). با مقایسه‌ی دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ آیا می‌توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟ اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم √(ab) = √a × √b. به کمک جدول بالا، درستی یا نادرستی رابطه‌ی √(a+b) = √a + √b را بررسی کنید.

a	b	√a	√b	ab	√(ab)	√a × √b
9	16	3	4	144	12	12
4	16	2	4	64	8	8
25	4	5	2	100	10	10

دو ستون آخر برابرند؛ پس جذر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت برابر حاصل‌ضرب جذرهای آنهاست: √(ab) = √a × √b.

رابطه‌ی √(a+b) = √a + √b نادرست است: مثلاً برای a = 9 و b = 16: √(9+16) = √25 = 5 ولی √9 + √16 = 3+4 = 7.

۲۳ صفحه ۱۱۵ کار در کلاس

۱ــ در تساوی‌های زیر، جاهای خالی را پر کنید: √14 = √2 × √7، √(16×25) = √16 × √25 = 4 × 5

۲ــ کدام یک از عبارت‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ √50 = 5√2، √50 = 25

۳ــ مانند نمونه، تساوی‌های زیر را کامل کنید: √20 = √(4×5) = 2√5؛ √8؛ √18؛ √12؛ √75

- √14 = √2 × √7
- √(16×25) = √16 × √25 = 4 × 5 = 20
- √50 = 25 نادرست است؛ 50 ≠ 25^2 = 625.
- √50 = √(25×2) = √25 × √2 = 5√2 درست است.
- √20 = √(4×5) = 2√5
- √8 = √(4×2) = 2√2
- √18 = √(9×2) = 3√2
- √12 = √(4×3) = 2√3
- √75 = √(25×3) = 5√3

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۱۱۶ فعالیت

جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم مقایسه کنید و تساوی به‌دست‌آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید: (a, b) = (16, 9), (25, 36), (1, 100), (49, 64)؛ √(a/b) و √a/√b.

a	b	√(a/b)	√a / √b
16	9	4/3	4/3
25	36	5/6	5/6
1	100	1/10	1/10
49	64	7/8	7/8

قانون: برای دو عدد مثبت a و b داریم √(a/b) = √a / √b؛ جذر حاصل تقسیم برابر تقسیم جذرهاست.

۲۵ صفحه ۱۱۶ کار در کلاس

۱ــ با استفاده از شکل روبه‌رو، درستی رابطه‌ی √(9/16) = 3/4 را بررسی کنید.

۲ــ در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید: √(1/144) = □، √(49/16) = □، −√(1/49) = □، ...

۳ــ به‌صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده‌شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص‌شده روی محورند؟

۱) مربعی به مساحت 9/16 داریم؛ ضلع آن 3/4 است (9/16 = (3/4)^2)؛ پس √(9/16) = 3/4 = √9/√16.

- √(1/144) = 1/12
- √(49/16) = 7/4
- −√(1/49) = −1/7

۳) هر عدد جذری را با تقریب بین دو عدد صحیح می‌گذاریم (مثلاً √(9/25) = 3/5 = 0.6 بین ۰ و ۱ و √(25/...) ...) و با نقطه‌ها منطبق می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۱۱۷ تمرین

۱ــ نزدیک‌ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید: $\sqrt{401}$، $\sqrt{310}$، $\sqrt{9999}$، $\sqrt{280}$، $\sqrt{175}$.
درستی پاسخ خود را به کمک ماشین‌حساب بیازمایید.
۲ــ یک محور اعداد رسم کنید و عددهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید: $\sqrt{14}$، $\sqrt{10}$، $\sqrt{24}$، $-\sqrt{3}$، $-\sqrt{8}$، $-\sqrt{17}$

عدد	مقدار تقریبی	نزدیک‌ترین عدد طبیعی
$\sqrt{401}$	20.02	20
$\sqrt{310}$	17.61	18
$\sqrt{9999}$	99.995	100
$\sqrt{280}$	16.73	17
$\sqrt{175}$	13.23	13

عدد	مقدار تقریبی
$\sqrt{14}$	3.74
$\sqrt{10}$	3.16
$\sqrt{24}$	4.90
$-\sqrt{3}$	-1.73
$-\sqrt{8}$	-2.83
$-\sqrt{17}$	-4.12

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۱۱۷ تمرین

۳ــ مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر 6- است. جاهای خالی را با چه عددهایی می‌توان پر کرد؟

با نوشتن مجموع هر سطر یا ستون که دو عدد آن معلوم است و برابر قرار دادن آن با 6-، خانه‌ی خالی آن خط به دست می‌آید (خانه‌ی مجهول = -6 - مجموع دو عدد معلوم)؛ سپس این کار را برای خط‌های دیگر تکرار می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸ صفحه ۱۱۷ تمرین

۴ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید: $(a^5 \times a^9)(b^{17} \div b^3)$، $\sqrt{36} / \sqrt{25} \times \sqrt{49}$

۵ــ جذر 700 را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین‌حساب بررسی کنید.

۶ــ دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید.

۷ــ پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید.

۸ــ اعداد رادیکالی زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در یک رادیکال بنویسید: $\sqrt{27}$، $\sqrt{50}$، $\sqrt{200}$

۴) $(ab)^{14} = a^{14} \times b^{14} = (a^5 \times a^9)(b^{17} \div b^3)$؛ و $\sqrt{49} \times \sqrt{25} / \sqrt{36} = 7 \times 5 / 6 = 35/6$.

۵) $26^2 = 676 < 700 < 729 = 27^2$ پس $26 < \sqrt{700} < 27$؛ $26.4^2 = 696.96$ و $26.5^2 = 702.25$ ؛ پس $\sqrt{700} \approx 26.5$ (ماشین‌حساب: 26.4575 که تا یک رقم اعشار 26.5 می‌شود).

۶) $\sqrt{5} \approx 2.24$ و $\sqrt{17} \approx 4.12$؛ عددهای طبیعی بین آنها 3 و 4 هستند.

۷) $\sqrt{3} \approx 1.73$ و $\sqrt{8} \approx 2.83$؛ مثلاً 1.8، 2، 2.2، 2.5، 2.7.

- $\sqrt{27} = \sqrt{(9\times3)} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt{50} = \sqrt{(25\times2)} = 5\sqrt{2}$
- $\sqrt{200} = \sqrt{(100\times2)} = 10\sqrt{2}$

۲۹ صفحه ۱۱۸ تمرین ترکیبی

۱ــ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. ۲ــ حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید. ۳ــ با تهیه‌ی جدول مناسب، جذر عدد 93 را تا دو رقم اعشار به دست آورید.

۴ــ عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید. ۵ــ به کمک رسم، مکان متناظر با عددهای $\sqrt{10}$، $\sqrt{13}$، $\sqrt{20}$ را روی محور اعداد مشخص کنید. ۶ــ مقدار عددی عبارت داده‌شده را به ازای مقدارهای داده‌شده به دست آورید.

۳) $9^2 = 81 < 93 < 100 = 10^2$ پس $9 < \sqrt{93} < 10$؛ جدول: $9.6^2 = 92.16$، $9.7^2 = 94.09$ $\Rightarrow$ $9.6 < \sqrt{93} < 9.7$؛ $9.64^2 = 92.93$، $9.65^2 = 93.12$ $\Rightarrow$ $\sqrt{93} \approx 9.64$ (ماشین‌حساب: 9.64365).

۵) $\sqrt{10} \approx 3.16$، $\sqrt{13} \approx 3.61$، $\sqrt{20} \approx 4.47$؛ هر یک را با رسم مثلث قائم‌الزاویه $\sqrt{10} = \sqrt{(9+1)}$، $\sqrt{13} = \sqrt{(9+4)}$، $\sqrt{20} = \sqrt{(16+4)}$ و کمان به مرکز مبدأ روی محور مشخص می‌کنیم.

۱، ۲، ۴، ۶) این پرسش‌ها از روی متن قابل بازسازی نیست؛ با قانون‌های توان و جذر حل می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.